

Вариант ФМШ20059-1-1

- Упростите выражение: $\left(\frac{4ab}{16a^2 + 8ab + b^2} + \frac{3a}{4a + b}\right) \cdot \left(4 + \frac{b}{a}\right)^2$.
- Решить уравнение: $\frac{6}{x} + \frac{6}{x+1} = 5$.
- Решите систему неравенств: $\begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 28}{x + 7} \leq -5 \\ x + 7 > -1 \end{cases}$.
- Один из катетов прямоугольного треугольника на 14 см больше другого, а гипотенуза равна 26 см. Найдите катеты треугольника.
- Лист жести имеет форму прямоугольника, длина которого на 10 см больше ширины. По углам этого листа вырезали квадраты со стороной 5 см и сделали коробку, объём которой 1000 см³. Найти размеры листа жести.
- Докажите, что сумма двух последовательных натуральных степеней числа 2 делится на 6.
- Построить график функции: $y = |x^2 - 7x - 8| + 1$.
- Путь от посёлка до станции идёт сначала в гору, а потом под гору, при этом длина всей дороги равна 9 км. Пешеход на подъёме идёт со скоростью, на 3 км/ч меньшей, чем на спуске. Путь от посёлка до станции занимает у него 2 ч, а обратный путь – 2 ч 30 мин. Определите длину подъёма со стороны посёлка и скорость пешехода на подъёме и на спуске.

Решение варианта 1

Задача 1.

$$\left(\frac{4ab}{16a^2 + 8ab + b^2} + \frac{3a}{4a + b}\right) \cdot \left(4 + \frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{4ab + 3a \cdot (4a + b)}{(4a + b)^2}\right) \cdot \left(\frac{4a + b}{a}\right)^2 = \frac{12a^2 + 7ab}{a^2} = \frac{12a + 7b}{a} = 12 + \frac{7b}{a}$$

Задача 2.

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x+1} = 5 \Leftrightarrow \frac{6 \cdot (x+1) + 6x - 5x \cdot (x+1)}{x \cdot (x+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2 - 7x - 6}{x \cdot (x+1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{3}{5} \\ x \neq 0, x \neq -1 \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left\{2; -\frac{3}{5}\right\}$.

Задача 3.

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 28}{x + 7} \leq -5 \\ x + 7 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 28 + 5 \cdot (x + 7)}{x + 7} \leq 0 \\ x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 8x + 7}{x + 7} \leq 0 \\ x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1) \cdot (x+7)}{x+7} \leq 0 \\ x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \neq -7 \\ x > -8 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-8; -7) \cup (-7; -1]$.

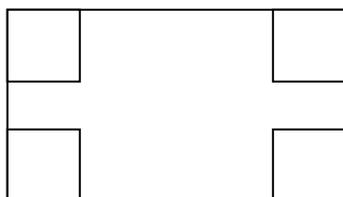
Задача 4.

Пусть меньший катет этого треугольника равен x см, тогда больший равен $(x + 14)$ см. Используя теорему Пифагора, получаем: $x^2 + (x + 14)^2 = 26^2 \Leftrightarrow x^2 + 14x - 240 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -24 \\ x > 0 \end{cases}$

Следовательно, меньший катет равен 10 см, а больший – $(10 + 14) = 24$ см.

Ответ: 10 см и 24 см.

Задача 5.



Длина стороны квадрата равна 5 см, значит, высота коробки также равна 5 см. Пусть ширина листа равна x см, тогда его длина равна $(x + 10)$ см. Объём коробки равен $V = 5 \cdot (x - 10) \cdot x = 1000 \Leftrightarrow x = 20$.

Ответ: 30×20 см.

Задача 6.

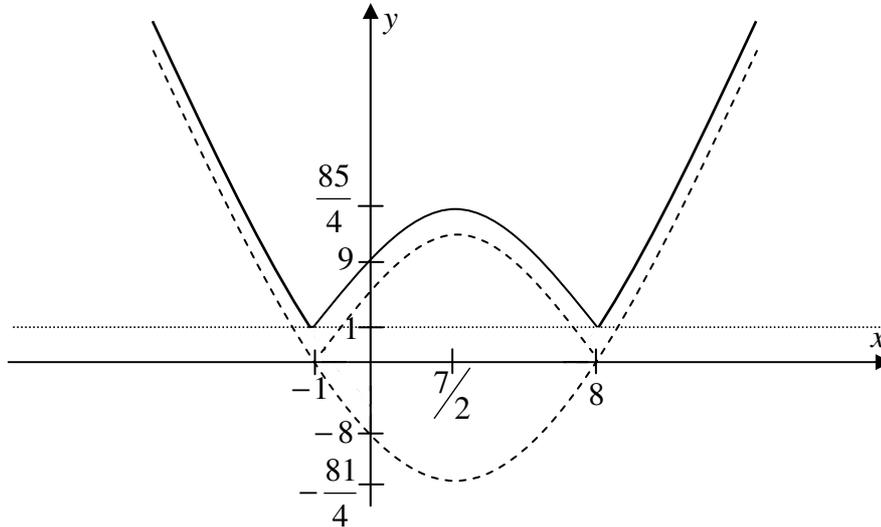
Составим и преобразуем указанную сумму: $2^n + 2^{n+1} = 2^n \cdot (1 + 2) = 2^{n-1} \cdot 2 \cdot (1 + 2) = 2^{n-1} \cdot 6$.

По условию задачи n – целое число ($n \geq 1$), следовательно, при делении полученного выражения на 6 получится одно из следующих целых чисел: 0, 2, 4, 8 и т.д.. Что и требовалось доказать.

Задача 7.

График искомой функции является графиком функции $y = |x^2 - 7x - 8|$, сдвинутым на 1 вверх по оси Oy .

В свою очередь, график этой функции получается при отображении относительно оси Ox параболы $y = x^2 - 7x - 8$.

**Задача 8.**

Рассмотрим путь от станции до посёлка. Пусть скорость пешехода в гору равна x км/ч, а длина подъёма равна y км. Тогда скорость пешехода на спуске равна $(x + 3)$ км/ч, а длина спуска – $(9 - y)$ км. При движении в обратном направлении подъём и спуск меняются местами. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{9-y}{x+3} = 2 \\ \frac{9-y}{x} + \frac{y}{x+3} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y \cdot (x+3) + (9-y) \cdot x - 2x \cdot (x+3)}{x \cdot (x+3)} = 0 \\ \frac{(9-y) \cdot (x+3) + xy - \frac{5}{2}x \cdot (x+3)}{x \cdot (x+3)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 3y + 27 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{15}{2}x = 0 \\ 3y = 2x^2 - 3x \\ x \neq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x = 3$, $y = 3$.

Ответ: 3 км, 3 км/ч и 6 км/ч.

Вариант ФМШ20059-1-2

1. Упростить выражение: $\left(\frac{ab}{25a^2 + 20ab + 4b^2} - \frac{a}{5a + 2b} \right) \cdot \left(5 + \frac{2b}{a} \right)^2$.

2. Решить уравнение: $\frac{3}{x} - \frac{3}{x+4} = 1$.

3. Решить систему неравенств: $\begin{cases} \frac{x^2 - 11x + 30}{x - 5} \leq 6 \\ 2x - 15 < 5 \end{cases}$.

4. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а один из катетов на 2 см больше другого. Найдите катеты треугольника.

5. Из прямоугольного листа картона, одна из сторон которого в 2 раза больше другой, склеили коробку. Для этого по углам листа вырезали квадраты со стороной 5 см. Найдите размеры картонного листа, если объём коробки равен 1500 см^3 .

6. Докажите, что сумма трёх последовательных натуральных степеней числа 2 делится на 7.

7. Построить график функции: $y = |x^2 - 4x - 5| - 3$.

8. Путь от туристического лагеря до посёлка идёт сначала под гору, а затем в гору, при этом длина всей дороги равна 10 км. Туристы на спуске идут со скоростью, на 2 км/ч большей, чем на подъёме. Путь от лагеря до посёлка занимает у них 2 ч 48 мин, а обратный путь – 2 ч 32 мин. Определите длину спуска со стороны лагеря и скорости туристов на спуске и на подъёме.