Вариант ФМШ2017-10-1

1. Решите уравнение: $\operatorname{arcctg} x - \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$

2. Преподаватель ФМШ произнёс такую фразу: «Тождество – это равенство, верное при всех значениях переменной, уравнение – равенство, верное не при всех значениях переменной. Значит, равенство может быть либо тождеством, либо уравнением.» Внимательный физматшкольник спросил: «Получается, что уравнение не может иметь своим решением все числа? Но ведь это не так!» Кто, по Вашему мнению, прав: преподаватель или физматшкольник? Если кто-то неправ, то в чём именно? Какие минимальные коррективы нужно внести в указанные рассуждения, чтобы они стали верными?

3. Точка P находится на расстоянии $2m$ от точки A, являющейся вершиной равностороннего треугольника ABC, длины сторон которого равны m. Какую максимальную площадь может иметь четырёхугольник $PABC$?

4. Сколько целочисленных решений имеет система:
$$\begin{cases} |x|+|y|<n \\ x\cdot y>0 \end{cases} ?$$

5. Запрограммированному роботу необходимо пройти расстояние из точки A в точку B. Он проходит четверть всего расстояния за 1 час, потом четверть оставшегося расстояния снова за 1 час и т.д. Когда до пункта B осталось 3 км, робот прошёл их за 3 часа. Какие значения может принимать доля пути, пройденного роботом за первую половину времени пути? *(На основе задачи Юрия Краева, 8 класс, Ярославль)*

6. Среднее арифметическое двадцати различных натуральных чисел равно 20. Каковы наименьшее и наибольшее возможные значения наибольшего из этих чисел?

7. При каких значения параметра a неравенство
$$\left(x-\sqrt{a}\right)^2+\left(|y|-\sqrt{a}\right)^2 \le 2\cdot\frac{\left||a|-a^2\right|}{1-|a|}$$
имеет хотя бы одно решение? При каких значениях a площадь фигуры, все точки которой являются решениями данного неравенства, равна $\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{1}{2}$?
(На основе задачи Никиты Никитченко, 10 класс, Москва)

Вариант ФМШ2017-10-2

1. Решите уравнение: $\arccos x - \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$

2. Один физматшкольник выстроил следующую цепочку рассуждений: «Пусть $ax=0$, где $a\neq 0$. Поделим обе части равенства на x, получим: $a=\dfrac{0}{x}$. Если $x=0$, то делить на x нельзя. Следовательно, $x=0$ не является корнем уравнения $ax=0$.» Прав ли физматшкольник? Если нет, то в чём именно он неправ? Какие минимальные коррективы нужно внести в указанные рассуждения, чтобы они стали верными?

3. Точка K находится на расстоянии $\dfrac{m}{2}$ от точки A, являющейся вершиной равностороннего треугольника ABC, длины сторон которого равны m. Какую максимальную площадь может иметь четырёхугольник $KABC$?

4. Сколько целочисленных решений имеет система:
$$\begin{cases} |x|+|y|<n \\ x\cdot y<0 \end{cases} ?$$

5. Запрограммированному роботу необходимо пройти расстояние из точки A в точку B. Пятую часть исходного расстояния робот проходит за 1 час, затем пятую часть оставшегося расстояния снова за 1 час и т.д. Когда до пункта B осталось 4 км, робот прошёл их за 4 часа. Какие значения может принимать доля пути, пройденного роботом за вторую половину времени пути? *(На основе задачи Юрия Краева, 8 класс, Ярославль)*

6. Среднее арифметическое двадцати различных натуральных чисел равно 30. Каковы наименьшее и наибольшее возможные значения наибольшего из этих чисел?

7. При каких значения параметра a неравенство
$$\left(|x|-\sqrt{a}\right)^2+\left(y-\sqrt{a}\right)^2 \le 2\cdot\frac{\left|a^2-|a|\right|}{|a|-1}$$
имеет хотя бы одно решение? При каких значениях a площадь фигуры, все точки которой являются решениями данного неравенства, равна $20+30\pi$?
(На основе задачи Никиты Никитченко, 10 класс, Москва)