ФМШ 200511-II-1

1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 91 \\ x + y = 7 \end{cases}$.

2. Решить неравенство: $\left(x^2 + 10x + 25\right) \cdot (x - 7) \geq 0$.

3. Хорды AB и BC окружности перпендикулярны. Найти длину дуги AC, содержащей точку B, если $AB = 3$, $BC = 4$.

4. Упростить выражение: $\dfrac{b + (ab)^{1/2}}{a^{1/2}b - a^{3/2}} - \dfrac{1}{b^{1/2} - a^{1/2}}$.

5. Из пункта A в пункт B выехал автомобилист с постоянной скоростью 80 *км/ч*. Через 20 минут после этого из пункта B в пункт A выехал мотоциклист с постоянной скоростью 60 *км/ч*. На сколько позже приехал мотоциклист в пункт A, чем автомобилист в пункт B, если они встретились через 2 часа после выезда автомобиля? (Ответ записать в часах и минутах.)

6. Построить график функции $f(x) = \dfrac{(x-1) \cdot \left(x^2 + x - 2\right)}{x + 2}$.

7. Сумма пяти членов геометрической прогрессии равна 44, а третий, второй и четвёртый её члены составляют, кроме того, арифметическую прогрессию. Найти геометрическую прогрессию.

8. В равнобедренный треугольник со сторонами 13, 13 и 24 вписан прямоугольник так, что одна из его сторон расположена на стороне основания, а две вершины – на боковых сторонах треугольника. Найти, какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник.

9. Построить множество точек плоскости xOy, удовлетворяющих системе неравенств: $\begin{cases} y \leq \dfrac{x-1}{x-2} \\ |x - 1| \leq 2 \end{cases}$.

10. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $a = \dfrac{6x + 1}{x^2 + 2x + 5}$ имеет решение.

Решение варианта 1

Задача 1.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 91 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y) \cdot \left(x^2 - xy + y^2\right) = 91 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 - xy + y^2 + 3xy\right) - 3xy = 13 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

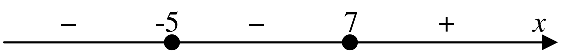
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 3xy = 13 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 12 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (7 - x) = 12 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(x; y) \in \{(3;4); (4;3)\}$.

Задача 2.

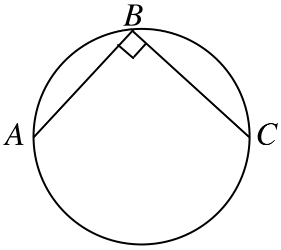
$$\left(x^2 + 10x + 25\right) \cdot (x - 7) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (x+5)^2 \cdot (x - 7) \geq 0.$$

Для решения данного неравенства применим метод интервалов:



Ответ: $x \in \{-5\} \cup [7; +\infty)$.

Задача 3.



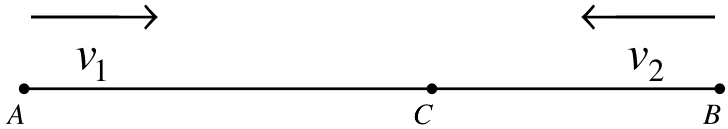
Угол $\angle ABC$ – вписанный, а, следовательно, он равен половине дуги, на которую опирается. Значит, т.к. $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, то $\cup AC = 180^\circ$. Это означает, что AC – диаметр данной окружности. Решая прямоугольный треугольник ABC, получаем $AC = 5$. Длина половины окружности есть $\cup AC = \frac{\pi d}{2} = \frac{5}{2}\pi$.

$$\textbf{\textit{Ответ:}}\ \cup AC = \frac{5}{2}\pi.$$

Задача 4.

$$\frac{b+(ab)^{1/2}}{a^{1/2}b-a^{3/2}}-\frac{1}{b^{1/2}-a^{1/2}}=\frac{b^{1/2}\cdot\left(b^{1/2}+a^{1/2}\right)}{a^{1/2}\cdot\left(b^{1/2}-a^{1/2}\right)\cdot\left(b^{1/2}+a^{1/2}\right)}-\frac{1}{b^{1/2}-a^{1/2}}=\frac{b^{1/2}}{a^{1/2}\cdot\left(b^{1/2}-a^{1/2}\right)}-\frac{a^{1/2}}{a^{1/2}\cdot\left(b^{1/2}-a^{1/2}\right)}=\frac{1}{a^{1/2}}.$$

Задача 5.

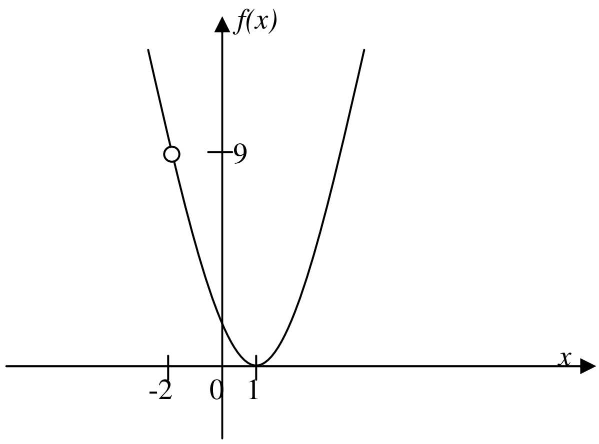


Пусть автомобилист и мотоциклист встретились в точке C, тогда расстояние от A до C равно $S_{AC} = 2\cdot v_1 = 160\,км$, а от C до B – $S_{CB} = \left(2-\frac{1}{3}\right)\cdot v_2 = 100\,км$. Получаем расстояние между пунктами A и B: $S = S_{AC} + S_{CB} = 260\,км$. Автомобилист пройдёт его за $t_1 = \frac{S}{v_1} = \frac{13}{4}\,ч$, а мотоциклист – за $t_2 = \frac{S}{v_2} = \frac{13}{3}\,ч$. Причём последний выехал на $20\,мин = \frac{1}{3}\,ч$ позже. Разница во времени составляет $\Delta t = \frac{14}{3} - \frac{13}{4} = \frac{17}{12}\,ч$.

Ответ: 1 *ч* 25 *мин*.

Задача 6.

$$f(x) = \frac{(x-1)\cdot\left(x^2+x-2\right)}{x+2} = \frac{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-1)}{x+2} = (x-1)^2,\ x \neq -2.$$



Задача 7.

Обозначим через $b_1, b_2, b_3, \ldots$ неизвестную геометрическую прогрессию. Тогда $b_3, b_2, b_4, \ldots$ – арифметическая прогрессия. По формулам для *n*-го члена арифметической $\left(a_n = a_1 + d(n-1)\right)$ и геометрической $\left(b_n = q^{n-1} \cdot b_1\right)$ прогрессий получаем: $a_2 = a_1 + d = b_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 + 2d = b_1 \cdot q^3$. Учитывая, что $a_1 = b_3 = b_1 \cdot q^2$, используя формулу для суммы первых *n* членов геометрической прогрессии $\left(S_n = b_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}\right)$, составим систему уравнений:

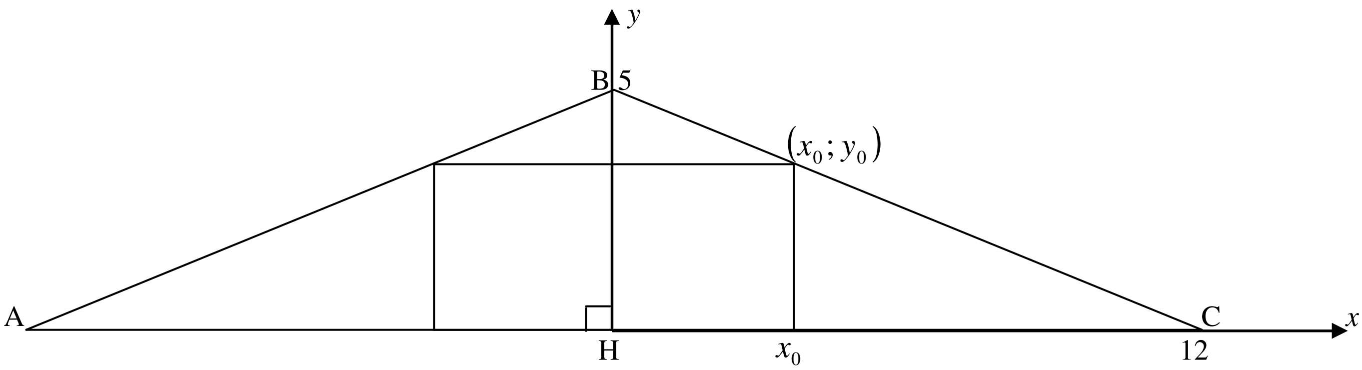
$$\begin{cases} b_1 \cdot q^2 + d = b_1 \cdot q \\ b_1 \cdot \dfrac{1-q^5}{1-q} = 44 \\ b_1 \cdot q^2 + 2d = b_1 \cdot q^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = b_1 \cdot q - b_1 \cdot q^2 \\ b_1 \cdot \dfrac{1-q^5}{1-q} = 44 \\ b_1 \cdot q \cdot \left(q^2 + q - 2\right) = 0 \end{cases}.$$

При $b_1 = 0$ все члены геометрической прогрессии равны нулю, следовательно, сумма не может равняться 44. При $q = 0$ получаем $b_1 = 44$, а арифметическая прогрессия обнуляется $\left(a_1 = 0, d = 0\right)$, что не противоречит условию задачи. И последний случай: $q^2 + q - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 1 \\ b_1 = \dfrac{44}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} q = -2 \\ b_1 = 4 \end{cases} \end{array}\right.$.

Следовательно, существуют три подходящие геометрические прогрессии.

Ответ: $(b_1; q) \in \left\{(44;0); \left(\dfrac{44}{5};1\right); (-4;-2)\right\}$.

Задача 8.



Обозначим вершины треугольника *A*,*B*,*C*. Тогда $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Высота *BH* треугольника *ABC* по свойствам равнобедренного треугольника является в то же время и медианой, т.е. $AH = HC = 12$. Следовательно, по теореме Пифагора получаем $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 5$. Введём систему координат так, как это показано на рисунке. Уравнение прямой *BC* имеет вид $y = 5 - \dfrac{5}{12}x$. Получаем функцию площади искомого прямоугольника: $S(x_0) = 2x_0 \cdot y_0 = 2x_0 \cdot \left(5 - \dfrac{5}{12}x_0\right) = 10x_0 - \dfrac{5}{6}x_0^2$. Исследуем эту функцию на экстремум: $S'(x_0) = 10 - \dfrac{5}{3}x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 6$. Получаем $\max\limits_{[0;12]} S(x_0) = S(6) = 30$.

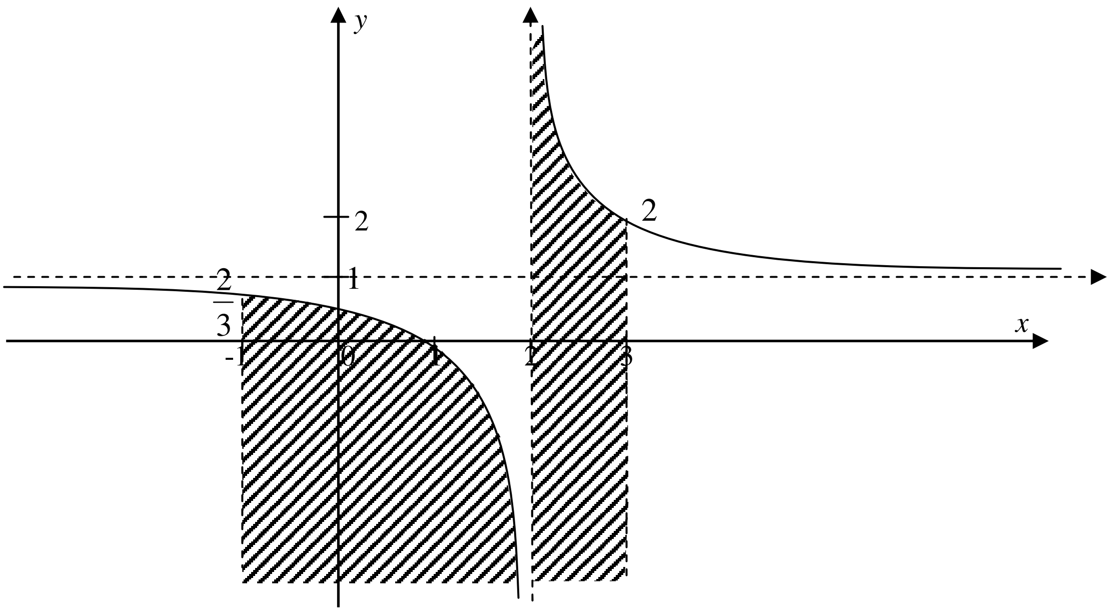
Ответ: $S_{\max} = 30$.

Задача 9.

$$\begin{cases} y \le \dfrac{x-1}{x-2} \\ |x-1| \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le \dfrac{x-1}{x-2} \\ -1 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le \dfrac{x-2}{x-2} + \dfrac{1}{x-2} \\ -1 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 1 + \dfrac{1}{x-2}. \\ -1 \le x \le 3 \end{cases}$$

Функция $y = 1 + \dfrac{1}{x-2}$ представляет собой гиперболу $y = \dfrac{1}{x}$, сдвинутую на 2 единицы вправо и на 1 вверх.

Значения функции на границах заданной области $(-1 \le x \le 3)$ равны $\dfrac{2}{3}$ и 2.



Задача 10.

Данная задача сводится к нахождению множества значений функции $f(x) = \dfrac{6x+1}{x^2+2x+5}$. Так как квадратный трёхчлен в знаменателе не имеет корней, то значение знаменателя всегда строго больше нуля, следовательно, функция определена при $x \in R$, и для вычисления экстремумов достаточно найти нули производной:

$$f'(x) = \frac{6 \cdot (x^2+2x+5) - (2x+2) \cdot (6x+1)}{\left(x^2+2x+5\right)^2} = \frac{-6x^2 - 2x + 28}{\left(x^2+2x+5\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{7}{3}. \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Графиком функции в числителе производной является парабола, ветви которой направлены вниз. Это означает, что $x = -\dfrac{7}{3}$ – точка минимума функции *f(x)*, а $x = 2$ – точка максимума. Значения *f(x)* в этих точках равны $-\dfrac{9}{4}$ и 1 соответственно.

Ответ: $a \in \left[-\dfrac{9}{4}; 1\right]$.

ФМШ 200511-II-2

1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 117 \\ x - y = 3 \end{cases}$.
2. Решить неравенство: $\left(x^2 - 6x + 9\right) \cdot (x + 5) \le 0$.
3. Хорды *AB* и *BC* окружности перпендикулярны. Найти длину дуги *AC*, не содержащей точку *B*, если *AB* = 5, *BC* = 12.
4. Упростить выражение: $\dfrac{a - (ab)^{1/2}}{ab^{1/2} - b^{3/2}} + \dfrac{1}{a^{1/2} + b^{1/2}}$.
5. Из пункта *A* в пункт *B* по озеру вышел теплоход с постоянной скоростью 40 *км/ч*. Через 15 минут после этого из пункта *B* в пункт *A* вышел катер с постоянной скоростью 30 *км/ч*. На сколько позже пришёл катер в пункт *A*, чем теплоход в пункт *B*, если они встретились через 3 часа после выхода катера? (Ответ записать в часах и минутах.)
6. Построить график функции $f(x) = \dfrac{(x+1) \cdot \left(x^2 - x - 2\right)}{x - 2}$.
7. Сумма семи членов геометрической прогрессии равна 129, а четвёртый, третий и пятый её члены составляют, кроме того, арифметическую прогрессию. Найти геометрическую прогрессию.
8. В равнобедренный треугольник со сторонами 5, 5 и 8 вписан прямоугольник так, что одна из его сторон расположена на стороне основания, а две вершины – на боковых сторонах треугольника. Найти, какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник.
9. Построить множество точек плоскости *xOy*, удовлетворяющих системе неравенств: $\begin{cases} y \ge \dfrac{x+3}{x+2} \\ |x+1| \le 2 \end{cases}$.
10. Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $a = \dfrac{4x + 11}{x^2 + 4x + 5}$ имеет решение.

ФМШ 200511-II-3

1. Решить уравнение: $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} + \dfrac{x^3 + 64}{x^2 + 5x + 4} = 8$.
2. Найти все решения неравенства $\cos(x - \pi) \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке $x \in [\pi; 3\pi]$.
3. Построить график функции $y^2 + 5y - x + 6 = 0$.
4. Найти площадь треугольника *ABC*, если его вершины имеют координаты: $A(-1;-3)$, $B(2;-1)$ и $C(-2;5)$.
5. Решить уравнение: $\sin 2x - \sin 3x + \sin 4x = \cos 2x - \cos 3x + \cos 4x$.
6. Два автобуса выехали одновременно из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу с постоянными скоростями 60 *км/ч* и 40 *км/ч* соответственно. Найти расстояние между пунктами *A* и *B*, если через 45 минут после выезда расстояние между автобусами составило 10 километров.
7. Решить систему неравенств: $\begin{cases} |x-4| + |8-x| - |x+7| \ge -1 \\ x^2 < 9 \end{cases}$.
8. В четырехугольник *ABCD* вписана окружность радиуса 4, причём её центр *O* лежит на отрезке *BD*. Найти площадь четырёхугольника, если $OB = 5$, $CB = 7$.
9. Найти все значения *a*, при каждом из которых уравнение $\dfrac{x^2 - ax - 3x + 2a + 2}{x + 2} = 0$ имеет единственный корень.
10. Построить множество точек плоскости *xOy*, удовлетворяющих хотя бы одному уравнению, неравенству или системе уравнений и неравенств: $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$,

$$x^2 + y^2 + 2x - 12y + 36 = 0,\ x^2 + y^2 + 4x - 6y + 24 = 0,\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0,\ \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{2}\right)^2 \le 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{2}\right)^2 \le 0,\ \begin{cases} y = 6 \\ -\dfrac{5}{2} \le x \le -1 \end{cases},\ \begin{cases} y = \dfrac{11}{2} \\ -\dfrac{3}{2} \le x \le -\dfrac{1}{2} \end{cases},\ \begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ 7 \le y \le 9 \end{cases}.$$