Лестница, статически неопределимая

Л.АШКИНАЗИ

Вот задача, которую (насколько я помню) решали школьники еще в Древнем Египте. К стене прислонена лестница, надо найти действующие на нее силы. Поскольку вы сейчас не в школе, а читаете журнал «Квант», вам ничего не «дано» – сообразите сами, что вам нужно. Если у вас есть нормальный для школьника опыт решения сотни-другой задач по механике, вы мгновенно скажете – нужны масса, ускорение свободного падения, длина, угол, коэффициенты трения. Если у вас этого опыта нет, но вы усвоили школьный учебник, вы скажете то же самое, но не так быстро. Однако вы, возможно, сделали несколько ошибок. Вы не сказали, что стена, пол, короче – весь дом не имеет ускорения. Действительно, если он имеет ускорение, равное g и направленное вниз, то все силы равны нулю, а если нет – то нет? Далее, длину вы упомянули зря, она в ответ не войдет, хотя бы потому, что размерность ее – метр, а ответ должен быть в ньютонах. А значит, он может зависеть только от mg и от безразмерных величин. У нас в этой задаче безразмерные коэффициенты трения и – внимание – отношения длин, например длины лестницы, расстояния ее низа от стены и расстояния ее верха от пола. Эти отношения войдут в ответ, скорее всего, как тригонометрические функции угла (любого из двух). Ну а, если вы очень осторожны и предусмотрительны, то вы еще упомяните про положение центра тяжести.

Все эти соображения должны промелькнуть у вас в голове до того, как вы начнете писать уравнения. Такой предварительный взгляд на задачу всегда полезен, даже если он приблизителен и не точен. Теперь вы, как хороший послушный школьник, рисуете все силы (рис. 1,a), пишите уравнения: «сумма сил по горизонтали», «сумма сил по вертикали» и «сумма моментов относительно центра тяжести» равны нулю. И – о ужас – у вас есть три уравнения и четыре неизвестных. У составителей задач есть способ бороться с

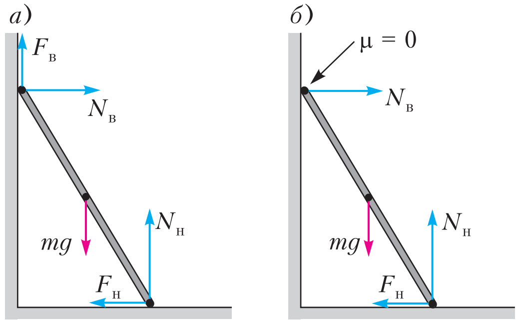

Рис. 1

этой ситуацией – «придушить» одно неизвестное, в данном случае объявить, что трение в верхней точке контакта отсутствует: коэффициент трения $\mu = 0$ (рис. 1,*б*). Естественно, это отключает одну из сил, но где вы видели стену без трения? Кстати, очевидно, что если объявлять $\mu = 0$ в нижней точке, то это может быть опасно для жизни.

Эта задача – одна из многих «статически неопределимых задач». Так называют задачи статики, в которых количество неизвестных больше количества уравнений. В школе обычно рассматривают плоские задачи статики – всего лишь потому, что картинки к ним легко рисовать на плоской поверхности: на бумаге, доске или экране. В таких задачах уравнений три – два про сумму сил вдоль осей координат и одно про сумму моментов. На досуге подумайте, сколько уравнений будет для трехмерной задачи статики.

Понятно, что в реальной жизни что бы с телами не делали, как бы их не располагали, все силы в итоге приобретают какие-то значения. «Нерешаемость» этих задач возникает потому, что мы чем-то пренебрегли, а для решения нужно это «что-то» учесть. Но имейте в виду – если мы это «что-то» учтем и задача получит свое решение, то это будет означать, что мы решили данную задачу лишь в данном приближении. В нашем случае «что-то» – это деформации элементов системы. При рассмотрении какой-либо другой задачи или даже при увеличении требований к точности решения может понадобиться учесть что-то еще.

Рассмотрим простой пример, а потом вернемся к нашей лестнице. Пусть балка висит на двух тросах и нужно найти их натяжения (рис. 2). Задача тривиальна: горизонтальных сил нет, так что уравнений два и неизвестных тоже два. Приделываем третий трос

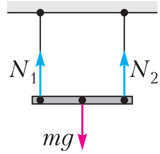

Рис. 2

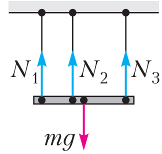

Рис. 3

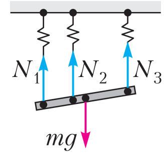

Рис. 4

(рис. 3) и... наступает караул. Попробуем учесть деформации – но чьи? Деформации тросов в школе подчиняются закону Гука, а деформацию балки в школе не посчитать. Поэтому ограничимся тросами, их деформация показана на рисунке 4 условно в виде пружин. У нас прибавится шесть известных величин: начальные длины и коэффициенты в законе Гука, три неизвестных: итоговые длины и три уравнения: зависимость длин веревок от натяжений, т.е. уравнения закона Гука, но не в виде $F = kx$, а в виде $L = L_0 + N/k$, где L_0 – начальная длина, N – сила натяжения, k – коэффициент жесткости.

Однако нам как не хватало одного уравнения, так не хватает и сейчас. Не видите ли вы на рисунке еще одно уравнение? Уравнения этого типа называют уравнениями совместимости деформаций. Действительно, деформации элементов конструкции как-то связаны, размеры элементов конструкции не могут быть произвольными. Например, если точки закрепления тросов на балке лежали на одной прямой, то они и будут лежать на одной прямой, а если деформации невелики, то тросы параллельны и итоговые длины связаны тривиальным уравнением. Это и будет седьмое уравнение, которого нам не хватало.

Задачу можно решить и при больших деформациях, просто решение будет длиннее. Можно рассмотреть и широкий диапазон начальных длин и коэффициентов жесткости, причем в этом случае можно написать программу, которая будет подвешивать балку на тросах прямо на экране и показывать нам поведение при варьировании исходных величин.

Вернемся к лестнице, но с ней ситуация будет сложнее – тросов, к которым естественно применить закон Гука, нет. Первое, о чем можно задуматься, это откуда берется сила трения покоя, каков ее механизм. Ответ лежит внутри школьного курса, нужно только его применить. Третий закон Ньютона говорит нам, что если сила трения действует на какое-то тело, то такая же по модулю сила действует и на второе тело, вызывающее эту силу, а закон Гука (при жизни эти двое враждовали, а их результаты теперь трудятся совместно) сообщает, что в этом случае должны быть деформации. И действительно, поверхностные слои тел деформируются, причем и того, которое собирается скользить, и того, на котором оно лежит. Тут есть одна тонкость – закон Гука в школе формулируется для деформации растяжения и сжатия, когда слои вещества перемещаются примерно так, как при распространении продольной волны. А при трении вещество перемещается хитрее, комбинируя и деформации растяжения-сжатия, и деформации сдвига, при которых слои перемещаются так, как при распространении поперечной волны.

А теперь – вот наша лестница, сначала просто «приложенная» к стене и полу, а потом мы включили тяготение, и она потерлась о стену и пол и слегка переместилась (рис. 5). Будем считать лестницу жесткой, т.е. ее деформацией и изменением длины пренебрежем. Тогда получаем соотношения $F_н = k_н y_н$ и $F_в = k_в y_в$, где k – коэффициенты жесткости по отношению к сдвигу, y – смещения, «н» и «в» – индексы, означающие «нижний» и «верхний». Поскольку длина лестницы постоянна, то сумма квадратов расстояний от угла до мест касания стены и пола должна быть одинакова для двух положений лестницы. Пишем уравнение и, пренебрегая членами с y^2, получаем наше четвертое уравнение

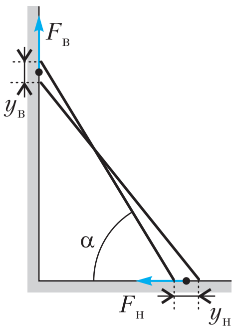

Рис. 5

$$\frac{F_н}{F_в} = \frac{y_н}{y_в} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Каким может быть дальнейшее развитие и уточнение этой модели? Первое, самое простое и очевидное – учесть деформацию лестницы. Для этого надо сообразить, какая продольная сила ее сжимает, ввести коэффициент жесткости лестницы и переделать последнее уравнение, учтя изменение ее длины. Второй, более сложный ход – учесть не только деформации сдвига, но и деформации сжатия, введя четыре коэффициента жесткости, два для сдвига и два для сжатия, и связав их с силами в соответствии с законом Гука. Уравнения пишутся легко, и – ах, какую красивую программу можно будет составить. Вводим цифры, и прямо на экране лестница прислоняется, проминает пол и стену, скользит по ним и останавливается. Или удивленно падает.

А если говорить серьезно, то, решив физическую задачу, нужно поразмыслить, чем и почему мы пренебрегли и как бы что-то из этого учесть. Чтобы нам было чем заняться и через час, и завтра, и всегда.